Cvičení MAB2 LS 2007/08 — 3. týden

20080229

Program: Integrování racionálních funkcí. Měli by k tomu znát z přednášek teorii — tj. umět rozklady na parciální zlomky a postup integrace integrálů typu $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\mathrm{d}x$ a $\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$. Určitě však neuškodí jim onen „algoritmus“ na začátku stručně zopakovat.

Příklady na procvičení:

$$\int \frac{dx}{x^2-1}\ , \qquad \int \frac{2x+3}{x^2-1}dx\ , \qquad \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}\ .$$

Kontrola:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2} = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)^2} - \frac{5}{4(x+3)}$$

Připomeňte, jak se dělí polynom polynomem, eventuelně je to naučte.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3}\ , \qquad \int \frac{x+2}{x^2+2x+3}dx\ , \qquad \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}\ ,$$

$$\int \left(\frac{x^2}{x^2-3x+2}\right)^2 dx\ ,$$

Kontrola:

$$\frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

$$\frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{4}{x-2} - \frac{3}{x-1},$$

$$\frac{1}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1},$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2-3x+2}\right)^2 = 1 + \frac{16}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{6}{x-1}.$$

Zopakujte, jak se hledají kořeny rovnice

$$x^k = a\ , \qquad a \in R$$

a jak se shlukují komplexně sdružené kořeny, abychom dostali rozklad na kořenové činitele a kvadratické dvojčleny. V této souvislosti připomeňte i Moivreovu větu. Vypočtěte integrály

$$\int \frac{dx}{x^4-1}\ , \qquad \int \frac{dx}{x^4+1}\ , \qquad \int \frac{dx}{x^6+1}\ ;$$

pozn:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)},$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}-x}{2\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}x+1)} + \frac{\sqrt{2}+x}{2\sqrt{2}(x^2+\sqrt{2}x+1)},$$

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{2-\sqrt{3}x}{6(x^2-\sqrt{3}x+1)}+\frac{1}{3(x^2+1)}+\frac{2+\sqrt{3}x}{6(x^2+\sqrt{3}x+1)};$$

ukažte jim, že rozklady se dají „chytřeji“ než z Moivreovy věty dostat např. takto:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$$

$$x^6+1=(x^2)^3+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)=(x^2+1)(x^4+2x^2+1-3x^2)=$$
$$=(x^2+1)\Big((x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2\Big)=(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1).$$

Ukažte na vhodnost použití různých substitucí:

zde např. $x^2=t$: (nemusíte dopočítávat..)

$$\int\frac{xdx}{x^8-1}\ .$$

Následující příklady vyřešte s pomocí podobné vhodné substituce, eventuelně úpravy…

$$\int\frac{x^3}{x^8+3}dx\ ,\qquad \int\frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx\ ,\qquad \int\frac{dx}{x^4(x^6+1)}dx$$

$$\int\frac{dx}{x(x^{10}+2)}\ =\ \int\frac{x^9}{x^{10}(x^{10}+2)}dx\ ,$$

$$\int\frac{x^2+x}{x^6+1}dx\ =\ \int\frac{x^2}{x^6+1}dx\ +\ \int\frac{x}{x^6+1}dx\ ,$$

$$\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx\ ,\qquad \int\frac{x^4}{(x^{10}-10)^2}dx\ ,\qquad \int\frac{1-x^7}{x(x^7+1)}dx\ =\ \int\frac{x^6(1-x^7)}{x^7(x^7+1)}dx\ ,$$

Pokud zbyde čas, použijte některé z příkladů 154–207 ze skript.